

# Studi Numerik *Spring Constant* Pada Material Isotropik Menggunakan *Discrete Element Method*

Jariyanti<sup>1,a</sup>

<sup>1</sup> Jurusan Teknik Sipil, Politeknik Negeri Fakfak, Jl. Imam Bonjol Atas, Air Merah, Wagon, Fakfak, 98612, Indonesia  
<sup>a</sup>jariyanti14@gmail.com

**Abstract**—Discrete Element Method (DEM) is one of the numeric method used to modeling and analysis. The object of DEM analysis is assumed as a collection of discrete element and the interaction among the elements is determined by the spring constant, inertia and friction coefficient. Modeling Spring constant in normal ( $k_n$ ) and tangential direction ( $k_s$ ) has been studied using the number of elements in cluster approach and the size of the uniform elements. The approach of uniform element size oftentimes cannot be used to complex geometric forms. Therefore, another approach is needed.

This study aims to analyze spring constant formula numerically in normal ( $k_n$ ) and tangential ( $k_s$ ) direction with the approach of two elements that have different size (radius). Material modeling is an isotropic material. Geometric modeling is a hexagon. Assume the circle inscribed into a hexagon with  $r_i$  is the size of the radius on element  $i$  and  $r_j$  is size of the radius on element  $j$ . Furthermore, determine the interaction of force between elements, then determine the stress components. Compared Stress components from modeling with the constitutive matrix of isotropic material to determine the function  $k_n$  and  $k_s$ .

The results shown that the displacement values of  $k_n$  and  $k_s$  simulation and analytical are -0.000556 mm and -0.000585 mm with a ratio value of the error function of  $k_n$  and  $k_s$  is 4.89486%.

**Keywords**—component; formatting; style; styling; insert (at least 3 key words) (Font 9)

**Abstrak**—*Discrete Element Method* (DEM) merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk pemodelan dan analisis. Dalam analisis DEM, obyek diasumsikan sebagai kumpulan elemen diskrit dan interaksi diantara elemen ditentukan oleh konstanta pegas, kelembaman dan koefisien gesek. Pemodelan konstanta pegas pada arah normal ( $k_n$ ) dan tangensial ( $k_s$ ) telah banyak diteliti dengan pendekatan jumlah elemen dalam *cluster* dan ukuran elemen yang *uniform*. Pendekatan ukuran elemen yang *uniform* sering kali tidak dapat digunakan untuk bentuk geometri yang kompleks, oleh karena itu, diperlukan pendekatan yang lain. Pada penelitian ini, akan dianalisa secara numerik fungsi konstanta pegas pada arah normal ( $k_n$ ) dan tangensial ( $k_s$ ) dengan pendekatan dua elemen yang memiliki ukuran (radius) yang berbeda.

Pada penelitian ini, material yang dimodelkan adalah material isotropik. Bentuk geometri yang dimodelkan adalah heksagonal dengan asumsi didalamnya terdapat lingkaran yang

menyinggung tiap sisi, dengan ukuran radius ( $r_i$ ) pada elemen  $i$  dan radius ( $r_j$ ) pada elemen  $j$ . Selanjutnya, menentukan interaksi gaya antar elemen, kemudian menentukan komponen tegangan. Komponen tegangan yang diperoleh dari pemodelan, dibandingkan dengan matriks konstitutif material isotropik untuk menentukan fungsi  $k_n$  dan  $k_s$ .

Hasil penelitian menunjukkan bahwa nilai *displacement* dari simulasi fungsi  $k_n$  dan  $k_s$ , serta analitik masing-masing sebesar -0.000556 mm dan -0.000585 mm. Nilai *error* perbandingan hasil simulasi dan analitik sebesar 4.89486%.

**Kata Kunci**—*Discrete element method* (DEM), matriks konstitutif, isotropic, konstanta pegas

## I. Pendahuluan

Pemodelan merupakan salah satu cara pendekatan yang sering digunakan dalam bidang rekayasa dan teknik. Pada prinsipnya, pemodelan menyelesaikan masalah fisik dengan cara penyederhanaan suatu sistem. Secara umum, pemodelan dibagi menjadi dua yaitu metode analitik dan metode numerik. Untuk suatu sistem yang kompleks, metode analitik sulit untuk digunakan, sehingga perlu menggunakan metode numerik.

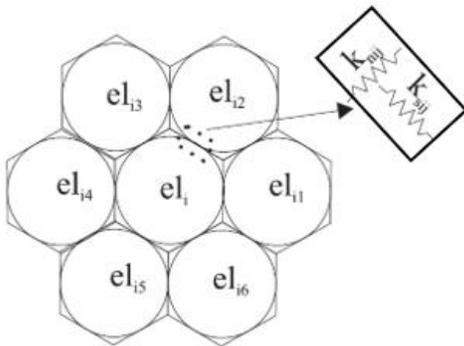
Metode numerik adalah suatu metode yang digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan yang dapat diformulasikan secara matematis dengan menggunakan cara operasi hitungan (*arithmetic*). Metode ini mampu menyelesaikan sistem persamaan yang besar, tidak linier dan geometri rumit yang jarang terjadi dalam praktik keteknikan serta seringkali sulit diselesaikan dengan cara analitis. Adapun metode numerik yang sering digunakan dalam rekayasa dan teknik adalah *finite difference method* (FDM), *boundary element method* (BEM), *finite element method* (FEM) dan *discrete element method* (DEM).

*Discrete Element Method* (DEM) merupakan salah satu metode numerik yang diperkenalkan

pertama kali oleh Cundall dan Strack (1979) untuk analisa granular. Analisis objek dalam DEM diasumsikan sebagai kumpulan partikel diskrit dan interaksi mekanis diantara partikel ditentukan oleh konstanta pegas (konstanta pegas normal ( $k_n$ ) dan konstanta pegas geser ( $k_s$ )), konstanta daspot atau kelembaman dan konstanta gesek, Purwantana (2004). Konstanta pegas menentukan *displacement* yang terjadi pada partikel yang diberi beban atau gaya. Ketika gaya yang diberikan melebihi batas elastisitasnya, maka partikel tersebut akan terpisah dari kumpulan partikel-partikel lainnya.

Pemodelan fungsi  $k_n$  dan  $k_s$  menggunakan DEM dalam sturuktur beton diteliti oleh Sawamoto dkk (1998). Pendekatan yang digunakan yaitu tujuh elemen dengan susunan satu elemen dikelilingi oleh enam elemen lainnya. Hasil penelitian menunjukkan bahwa model DEM sangat akurat untuk menilai kerusakan lokal pada struktur beton yang diberi beban tumbukan. Pendekatan sejenis diteliti oleh [1], yang memodelkan fungsi  $k_n$  dan  $k_s$  pada *solid* dan *particulate material*. Penelitian menunjukkan bahwa hasil konvergen diperoleh dari DEM.

Model fungsi  $k_n$  dan  $k_s$  dengan DEM juga diteliti oleh [2] pada material orthotropic untuk masalah impact. Bentuk elemen yang dimodelkan adalah heksagonal dengan pendekatan tujuh elemen. Bentuk dan susunan elemen dapat ditunjukkan pada Gambar1. Hasil penelitian menunjukkan bahwa model yang diusulkan dapat digunakan untuk analisis numerik pada masalah impact.



Gambar 1. Bentuk dan Susunan Elemen

Pemodelan pada material isotropik didasarkan dari konsep *discrete element*, diteliti oleh [3]. Pendekatan yang digunakan yaitu tiga elemen dengan bentuk dan ukuran yang sama. Hasil

penelitian menunjukkan bahwa *displacement* yang diperoleh dari formulasi *discrete element* dan *solid finite element* memiliki nilai yang sama.

Pemodelan pada material isotropik diteliti oleh [4]. Pendekatan yang digunakan yaitu dua elemen dengan bentuk heksagonal dan ukuran yang sama. Hasil penelitian menunjukkan bahwa hasil analisis numerik yang diperoleh dari model yang menggunakan dengan model tujuh-*disk*, memiliki hasil yang hampir sama.

Fungsi *spring constant* yang diperoleh oleh Gaeni diimplementasikan dalam masalah *impact*. Hasil penelitian menunjukkan analisis yang diperoleh sama dengan analisis yang diperoleh dengan metode LS-DYNA, [5]. Implementasi *spring constant* pada masalah tumbukan partikel pada balok keramik diteliti [6]. Hasil penelitian menunjukkan metode tersebut sangat akurat untuk analisis masalah tumbukan partikel pada balok keramik.

Pada penelitian ini akan dimodelkan  $k_n$  dan  $k_s$  dengan DEM pada material isotropik menggunakan pendekatan dua elemen dengan ukuran yang berbeda.

## II. Metode Penelitian

### A. Tahapan Penelitian

Secara umum tahapan penelitian yang dilakukan, antara lain sebagai berikut:

1. Studi Pustaka  
Studi pustaka dilakukan dengan tujuan untuk menambah pemahaman terkait DEM. Studi pustaka dapat diperoleh dari penelitian-penelitian sebelumnya tentang DEM.
2. Formulasi  $k_n$  dan  $k_s$   
Pada tahap ini akan dilakukan formulasi untuk memperoleh fungsi  $k_n$  dan  $k_s$ .
3. Simulasi DEM  
Untuk mengetahui keakuratan dan efisiensi dari  $k_n$  dan  $k_s$  yang diperoleh, maka akan dilakukan simulasi. Simulasi dilakukan dengan *software matlab*.
4. Analisis hasil dan kesimpulan  
Pada tahap ini, dilakukan analisis hasil yang diperoleh pada tahap simulasi. Selanjutnya

akan dibandingkan dengan hasil penelitian sebelumnya.

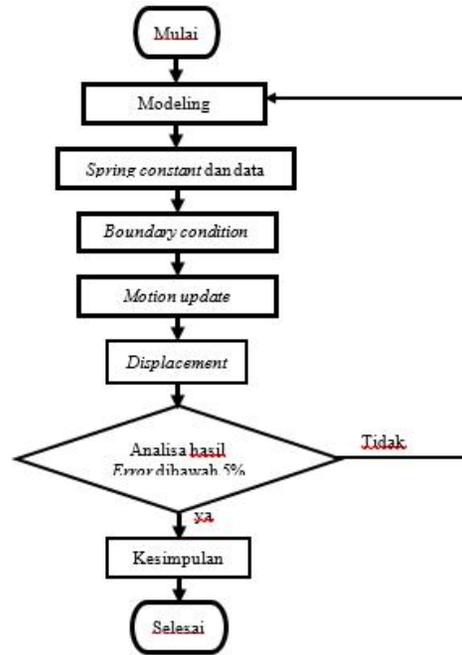
**B. Diagram Alir Penelitian**

Langkah-langkah penelitian dilakukan dengan baik dan sistematis seperti yang terdapat pada Gambar 2.



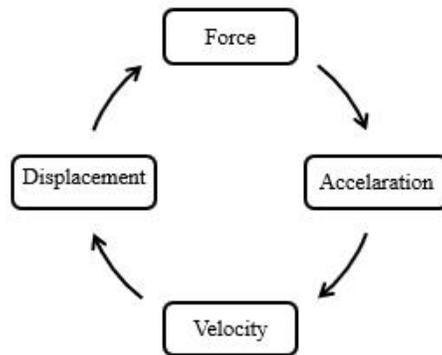
Gambar 2. Diagram Alir Metodologi Penelitian

Untuk validasi fungsi spring constant yang diperoleh, dilakukan simulasi. Adapun langkah-langkah simulasi dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Diagram Alir Simulasi DEM

Displacement pada simulasi DEM ditentukan dengan menentukan force, acceleration, dan velocity, seperti terlihat pada Gambar 4.



Gambar 4. DEM calculation cycle

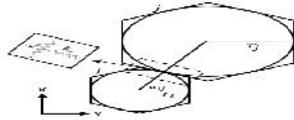
**III. Hasil dan Pembahasan**

**A. Formulasi Spring Constant Arah Normal dan Tangensial**

Langkah-langkah formulasi spring constant arah normal dan tangensial sebagai berikut.

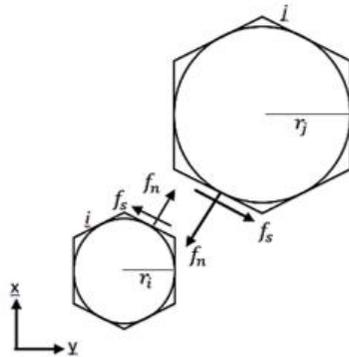
1. Penentuan geometri untuk formulasi spring constant arah normal dan tangensial. Pada penelitian ini geometri yang digunakan adalah heksagonal yang menyinggung lingkaran berjari-jari  $r$  di dalamnya, sehingga ukuran dari elemen  $i$  dan  $j$  dapat dinilai dari jari-jarinya ( $r$ ). Geometri

dan ukuran ( $r_i$  dan  $r_j$ ) pada elemen i dan j, seperti pada Gambar 7.



Gambar 5. Geometri dan Ukuran pada Elemen i dan j

2. Penentuan interaksi antar elemen: gaya normal ( $f_n$ ) dan gaya geser ( $f_s$ ) pada elemen i dan j seperti yang ditunjukkan pada Gambar 8.



Gambar 6. Gaya pada Elemen i dan j

Gaya normal ( $f_n$ ) dan gaya geser ( $f_s$ ) dapat ditentukan dengan pers. (4.1) dan (4.2).

$$f_n = k_n \cdot \Delta u_n \tag{1}$$

$$f_s = k_s \cdot \Delta u_s \tag{2}$$

dengan  $k_n$  adalah konstanta pegas normal,  $k_s$  adalah konstanta pegas geser,  $\Delta u_n$  adalah displacement normal dan  $\Delta u_s$  adalah displacement geser.

3. Penentuan regangan yang terjadi pada elemen dengan pers. (4.3) berikut:

$$\epsilon = \Delta u / u \tag{3}$$

dengan  $\epsilon$  adalah regangan,  $\Delta u$  adalah displacement, dan  $u$  adalah panjang awal. Regangan normal dan regangan geser pada pemodelan spring constant ini adalah sebagai berikut:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_n = \frac{\Delta u_n}{r_i + r_j} \tag{4}$$

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \epsilon_s = \frac{\Delta u_s}{l_i + l_j} = \frac{\Delta u_s \sqrt{3}}{2(r_i + r_j)} \tag{5}$$

$$\gamma_{xy} = \epsilon_{xy} + \epsilon_{yx} = \frac{\Delta u_s \sqrt{3}}{(r_i + r_j)} \tag{6}$$

penentuan luas penampang dengan pers. (7)

$$A = l \cdot \delta \tag{7}$$

dengan  $A$  adalah luas penampang,  $l$  adalah panjang sisi elemen, dan  $\delta$  adalah ketebalan elemen. Panjang sisi elemen heksagonal dengan 6 sisi yang menyinggung lingkaran berjari-jari  $r$  di dalamnya, dapat ditentukan dengan pers. (4.8) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{keliling} &= 2nr \tan \frac{\pi}{n} = 2nr \tan \frac{180}{n} \\ &= 12 \cdot r \cdot \tan 30 \\ &= 12 \cdot r \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} r \end{aligned}$$

Panjang sisi diperoleh dengan membagi nilai keliling dengan jumlah sisi, maka diperoleh:

$$l = \frac{4\sqrt{3} r}{6} = \frac{2\sqrt{3} r}{3}$$

Jadi luas penampangnya adalah:

$$A = (2\sqrt{3}r/3) \cdot \delta$$

4. Penentuan tegangan pada elemen dengan pers. (8):

$$\sigma' = \frac{f}{A} \tag{8}$$

dengan  $\sigma'$  adalah tegangan,  $f$  adalah gaya dan  $A$  adalah luas penampang.

Tegangan dibagi menjadi 2 yaitu tegangan normal dan tegangan geser. Pada formulasi ini

diperoleh tegangan normal dan tegangan geser sebagai berikut:

$$\sigma'_{xx} = \frac{f_{nij}}{A} = \frac{\Delta u_n \cdot k_n}{\delta \cdot l} = \frac{\Delta u_n \cdot k_n \cdot \sqrt{3}}{\delta \cdot 2 r_i} \tag{9}$$

$$\sigma'_{yy} = \frac{f_{nij}}{A} = \frac{\Delta u_n \cdot k_n}{\delta \cdot l} = \frac{\Delta u_n \cdot k_n \cdot \sqrt{3}}{\delta \cdot 2 r_i} \tag{10}$$

$$\sigma'_{xy} = \sigma_{yx} = \frac{f_s}{A} = \frac{\Delta u_s \cdot k_s}{\delta \cdot l} = \frac{\Delta u_s \cdot k_s \cdot \sqrt{3}}{\delta \cdot 2 r_i} \tag{11}$$

$$\tau'_{xy} = \frac{1}{2}(\sigma_{xy} + \sigma_{yx}) = \frac{\Delta u_s \cdot k_s \cdot \sqrt{3}}{\delta \cdot 2 r_i} \tag{12}$$

Substitusikan pers. (4) ke pers. (9), (10) dan pers. (5) ke pers. (12) sehingga diperoleh:

$$\sigma'_{xx} = \frac{k_n \cdot \sqrt{3} \cdot (r_i + r_j)}{\delta \cdot 2 r_i} \epsilon_{xx} \tag{13}$$

$$\sigma'_{yy} = \frac{k_n \cdot \sqrt{3} \cdot (r_i + r_j)}{\delta \cdot 2 r_i} \epsilon_{yy} \tag{14}$$

$$\tau'_{xy} = \frac{k_s \cdot (r_i + r_j)}{\delta \cdot 2 r_i} \gamma_{xy} \tag{15}$$

Jika pers. (13), (14) dan (15) dituliskan dalam bentuk matriks menjadi pers. (16)

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{xx} \\ \sigma'_{yy} \\ \tau'_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_n \cdot \sqrt{3} \cdot (r_i + r_j)}{\delta \cdot 2 r_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_n \cdot \sqrt{3} \cdot (r_i + r_j)}{\delta \cdot 2 r_i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_s \cdot (r_i + r_j)}{\delta \cdot 2 r_i} \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{16}$$

5. Penentuan matriks konstitutif isotropic

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{17}$$

dimana C adalah matriks konstitutif material isotropik

$$c_{11} = c_{22} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \tag{18}$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{E\nu}{(1 - \nu^2)} \tag{19}$$

$$c_{33} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{20}$$

Untuk menjaga ekuivalen antara C dan C', maka digunakan eigenvalue. Cara penentuan eigenvalue dengan menggunakan pers. (21) berikut:

$$\det(C - \lambda I) \tag{21}$$

jika dituliskan kembali:

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda I) &= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (c_{11} - \lambda)(c_{22} - \lambda)(c_{33} - \lambda) - c_{12} \cdot c_{21} (c_{33} - \lambda) - 0 \end{aligned} \tag{22}$$

Karena  $c_{11} = c_{22}$  dan  $c_{12} = c_{21}$ , maka persamaan (22) dapat ditulis kembali:

$$\det(C - \lambda I) - (c_{11} - \lambda)(c_{11} - \lambda)(c_{33} - \lambda) - c_{12} \cdot c_{12} (c_{33} - \lambda) - 0$$

Sehingga diperoleh:

$$\lambda_1 = c'_{11} = c_{11} + c_{12}$$

$$\lambda_2 = c'_{22} = c_{11} - c_{12}$$

$$\lambda_3 = c'_{33} = c_{33}$$

6. Penentuan spring constant arah normal ( $k_n$ ) dan spring constant arah tangensial ( $k_s$ ) sebagai berikut.

- *spring constant* arah normal ( $k_n$ )

$$c'_{11} = c_{11}$$

$$\frac{k_n \cdot \sqrt{3} \cdot (r_i + r_j)}{\delta \cdot 2 r_i} = c_{11} + c_{12}$$

$$k_n = \frac{\delta \cdot 2\sqrt{3} r_i}{3 (r_i + r_j)} (c_{11} + c_{12})$$

$$= \frac{\delta \cdot 2\sqrt{3} r_i}{3 (r_i + r_j)} \left( \frac{E}{(1 - \nu^2)} + \frac{E\nu}{(1 - \nu^2)} \right)$$

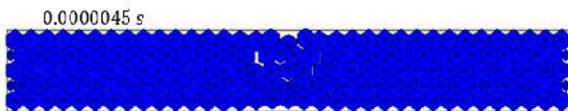
$$= \frac{\delta \cdot 2\sqrt{3} r_i}{3 (r_i + r_j)} \cdot \frac{E}{1 - \nu}$$

$$= \frac{\delta \cdot r_i}{r_i + r_j} \cdot \frac{E}{1 + \nu}$$

dengan  $E$  adalah modulus young,  $\nu$  adalah poisson rasio,  $\delta$  adalah ketebalan, dan  $r_i$  dan  $r_j$  adalah jari-jari elemen  $i$  dan  $j$

**B. Hasil Simulasi dengan Menggunakan Spring Constant yang Diperoleh dari Pemodelan dengan Jumlah 177 Elemen**

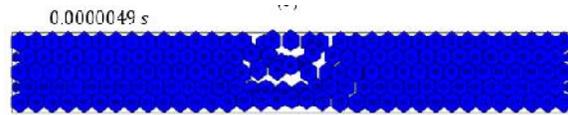
Hasil simulasi yang ditunjukkan pada Gambar 9 diperoleh dengan menggunakan spring constant yang diperoleh dari formulasi. Dari simulasi ini diamati perubahan displacement pada arah y yang terjadi pada elemen ke 89. Gambar 9 merupakan hasil simulasi pada saat 0.000045 s, nilai displacement yang diperoleh sebesar -0.0150 mm. Pada saat 0.000047 s dan 0.000049, displacement yang terjadi ditunjukkan pada Gambar 10 dan 11 dengan nilai masing-masing sebesar 0.0142 mm dan 0.0728 mm, sedangkan nilai displacement pada Gambar 12 sebesar 0.1346 mm.



Gambar 7. Simulasi dengan Spring Constant yang Diperoleh pada Penelitian Ini dengan Jumlah Elemen 177 Lanjutan



Gambar 8. Simulasi dengan Spring Constant yang Diperoleh pada Penelitian Ini dengan Jumlah Elemen 177 Lanjutan



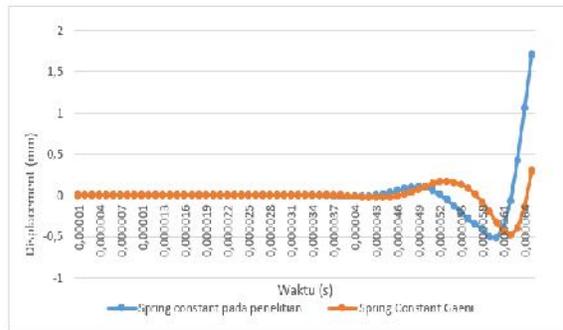
Gambar 9. Simulasi dengan Spring Constant yang Diperoleh pada Penelitian Ini dengan Jumlah Elemen 177 Lanjutan



Gambar 10 Simulasi dengan Spring Constant yang Diperoleh pada Penelitian Ini dengan Jumlah Elemen 177 Lanjutan

**C. Hasil Perbandingan Displacement Antara Simulasi dengan Spring Constant Gaeni dan Spring Constant dari Formulasi.**

Displacement didefinisikan sebagai nilai dari perubahan posisi benda dari posisi awal ke posisi akhir yang dipengaruhi oleh kecepatan dan waktu. Pada hasil simulasi yang ditunjukkan pada Gambar 13 merupakan grafik yang dihasilkan dari perbandingan simulasi menggunakan spring constant dari formulasi dan simulasi menggunakan spring constant yang diperoleh Gaeni.



Gambar 11. Grafik Perbandingan Simulasi Menggunakan Spring Constant yang Diperoleh dari Formulasi dan Spring Constant dari Formulasi Gaeni

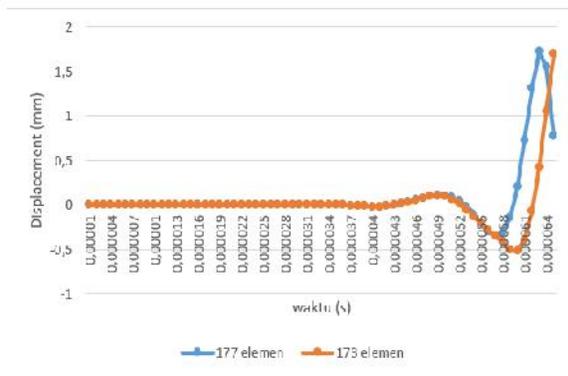
Hasil grafik perbandingan menunjukkan pola dan tren line yang sama pada waktu  $1 \times 10^{-2}$  s sampai  $43 \times 10^{-4}$  s. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa gaya yang diberikan pada spesimen belum memberi efek pada spesimen tersebut. Namun ketika waktu bertambah menjadi lebih dari  $43 \times 10^{-4}$  s, displacement yang terjadi mulai terlihat perbedaannya. Hal tersebut terjadi sampai waktu akhir  $65 \times 10^{-4}$  s. Displacement maksimum yang terjadi pada waktu  $65 \times 10^{-4}$  s adalah -0.5217 mm.

Jika nilai displacement yang diperoleh dari simulasi spring constant dari formulasi dibandingkan dengan simulasi spring constant Gaeni, dihasilkan nilai yang hampir sama yaitu displacement minimum sebesar -0.48103.

Oleh karena itu, sebagai kesimpulan bahwa nilai displacement yang terjadi dipengaruhi oleh gaya, properti material steel berupa densitas, modulus young, poisson rasio, dan parameter DEM. Ketika gaya, properti dan parameter DEM berbeda, maka displacement yang terjadi berbeda.

**D. Hasil Analisis Displacement pada Simulasi dengan Jumlah Elemen yang Berbeda**

Perbandingan displacement pada simulasi dengan spring constant yang diperoleh dari formulasi, namun jumlah elemen berbeda ditunjukkan pada Gambar 14



Gambar 12. Grafik Perbandingan Displacement Kearah y dengan Jumlah Elemen 173 dan 177

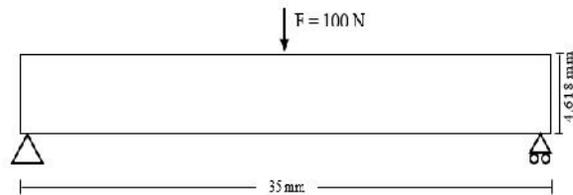
Pada Gambar 14 menunjukkan tren grafik memiliki arah yang hampir sama dari 0 s sampai  $4 \times 10^{-5}$  s. Pada saat  $4 \times 10^{-5}$  s nilai displacement dari simulasi dengan jumlah elemen sebanyak 177 dan 173 masing-masing sebesar -0.0181 mm dan -0.08122 mm. Sedangkan semakin bertambah waktunya, maka displacement yang terjadi mulai terlihat perbedaannya. Hal ini dapat diketahui dari grafik yang menunjukkan penurunan. Namun penurunan arah radial (-y) sampai nilai displacement minimum, terjadi pada waktu yang berbeda. Pada simulasi dengan 177 elemen, displacement minimum terjadi pada waktu  $5.8 \times 10^{-5}$  s dengan nilai sebesar -0.31342 mm. Selanjutnya, arah perubahan displacement mulai terjadi ketika waktunya semakin meningkat. Hal ini ditunjukkan

pada Gambar 4.7 bahwa perubahan displacement maksimum arah radial (+y) sebesar 1.720145 mm pada waktu  $6.3 \times 10^{-5}$  s.

Pada simulasi dengan 173 elemen, nilai displacement minimum terjadi pada arah radial (-y) sebesar -0.52147 mm, hal ini terjadi pada waktu  $6 \times 10^{-5}$  s. Selanjutnya, pada saat waktu bertambah, maka mengakibatkan displacement arah radial (+y) maksimal yang terjadi pada waktu  $6.5 \times 10^{-5}$  s sebesar 1.69003 mm.

**E. Perbandingan Hasil Analisis Defleksi Spesimen**

Defleksi adalah perubahan bentuk yang terjadi pada balok kearah radial (-y) akibat adanya pemberian gaya vertikal pada balok. Defleksi diukur dari permukaan netral awal ke posisi netral akhir. Hasil perhitungan defleksi dari spesimen dengan ukuran lebar 4.618 mm dan ketebalan 1 mm pada gaya (F) 100 N (Gambar 7). Untuk mendapatkan nilai defleksi dari spesimen yang digunakan, terlebih dahulu menghitung inersia pada beam. Nilai inersia yang diperoleh dari perhitungan sebesar  $1,778 \text{ mm}^4$ . Sehingga nilai defleksi yang diperoleh dari perhitungan sebesar -0.0005856 mm. Nilai hasil perhitungan defleksi akan dibandingkan dengan hasil simulasi.



Gambar 13. Dimensi dan Pemberian Gaya

Metode analitis yang digunakan menggunakan persamaan berikut:

$$I = \frac{bh^3}{12} \tag{23}$$

dengan  $b$  adalah ketebalan dan  $h$  adalah lebar.

Nilai inersia yang terjadi adalah:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1 \text{ mm} \times (4.6188 \text{ mm})^3}{12} = 1.778 \text{ mm}^4$$

$$y_c = \frac{F \cdot l^3}{48 E I} \tag{24}$$

dengan  $F$  adalah gaya,  $L$  adalah panjang,  $E$  adalah modulus young dan  $I$  adalah inersia.

Defleksi yang terjadi adalah:

$$y_c = \frac{F \cdot L^3}{48EI} = \frac{100N \times (35\text{ mm})^3}{48 \times (210 \times 10^3 \text{ N/mm}^2) \times 1.778 \text{ mm}^4} = -0.000585 \text{ mm}$$

Hasil perbandingan analisis defleksi antara hasil yang diperoleh dari perhitungan analitis, simulasi menggunakan spring constant yang diperoleh Gaeni dengan elemen sebanyak 173, dan simulasi dengan spring constant yang diperoleh dari formulasi dengan elemen sebanyak 173 dan 177. Hasil perbandingannya berupa nilai error yang ditunjukkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Perhitungan *error* dari perbandingan perhitungan analitik dan simulasi

No	Metode	Jumlah elemen	Pusat elemen yang diamati	Time (s)	Displacement (mm)	Error (%)
1	Simulasi dengan spring constant Gaeni	173	87	0.00002	-0.000499	14.76119
2	Simulasi dengan spring constant dari formulasi	173	87	0.00002	-0.000557	4.88332
3	Simulasi dengan spring constant dari formulasi	177	89	0.00002	-0.000556	4.89486
4	Analitis	1			-0.000585	

Nilai yang ditunjukkan pada Tabel 1 diketahui bahwa *displacement* yang diperoleh dari simulasi dengan *spring constant* Gaeni adalah -0.000499 mm dan apabila dibandingkan dengan hasil perhitungan analitis defleksi diperoleh nilai *error* sebesar 14.76960 %. Sedangkan nilai *displacement* dari simulasi dengan elemen sebanyak 173 dan 177 elemen menggunakan *spring constant* yang diperoleh dari formulasi diperoleh masing-masing sebesar -0.000557 mm dan -0.000556 mm. Apabila kedua nilai *displacement* tersebut dibandingkan dengan nilai perhitungan analitis defleksi, diperoleh nilai *error* masing-masing sebesar 4.88332 % dan 4.89862 %.

#### IV. Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, maka dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Hasil analitik terkait dengan Spring constant arah normal ( $k_n$ ) dan spring constant arah tangensial ( $k_s$ ) diperoleh persamaan

$$k_n = \frac{\delta \cdot 2\sqrt{3} r_i}{3 (r_i + r_j)} \cdot \frac{E}{1 - \nu}$$

$$k_s = \frac{\delta \cdot r_i}{r_i + r_j} \cdot \frac{E}{1 + \nu}$$

dengan  $k_n$  dan  $k_s$  adalah spring constant arah normal dan tangensial,  $E$  adalah modulus Young's,  $\nu$  adalah poisson ratio,  $r_i$  dan  $r_j$  adalah radius dari elemen i dan j, dan  $\delta$  adalah ketebalan.

2. Hasil simulasi diperoleh nilai displacement sebesar -0.000556 mm, sedangkan hasil analitik diperoleh sebesar -0.000585 mm. Perbandingan nilai error dari dua analisa tersebut diperoleh sebesar 4.89486%. Dengan demikian, nilai error dari spring konstan pada studi ini, relatif lebih rendah dibanding hasil penelitian sebelumnya.

#### Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih diberikan kepada kedua orang tua, saudara dan kerabat serta seluruh pihak yang telah membantu dalam proses penyelesaian penelitian ini.

#### Daftar Pustaka

- [1] Tavaréz, A.F. dan Plesha, M.E. (2007), "Discrete Element Method for Modeling Solid and Particulate Materials", *Int. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 70, hal. 379-404.
- [2] Liu, K., Gao, L. dan Tanimura, S. (2004), "Application of Discrete Element Method in Impact Problems", *JSME International Journal, Series A*, Vol. 47, No. 2, hal. 138-145.
- [3] Griffiths, D. V. dan Mustoe, G. G. W. (2001), "Modelling of Elastic Continua Using Grillage of Structural Element Based on Discrete Element Concepts", *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol. 50, hal. 1759-1775.
- [4] Gaeni, M., Mihardi S. dan Homma H. (2008), "Discrete Element Model for Continuum Dynamic Problems", *Journal of Solid Mechanics and Material Engineering*", Vol. 2, No. 12, hal. 1478-1486.
- [5] Sutikno, Homma H. dan Mihardi S. (2009), "Analysis on Contact Phenomenon under Particle Impact by Hybrid Method", *Journal of Solid Mechanics and material Engineering*", Vol. 3, No. 8, hal. 1010-1021.
- [6] Sutikno, Homma H. dan Mihardi S. (2010), "Effect of Particle Fragmentation on the Stress Evolution in the Beam Impacted by a particle using Hybrid Method", *Journal of Solid Mechanics and material Engineering*", Vol. 4, No. 4, hal. 508-519.